

7,05



Universidad

Técnica de Ambato

Facultad de contabilidad y
Auditoría

Carrera de Economía

Datos Informativos

N:

12

Cattleya Joeciver

23/10/2024

Segundo Semestre "A"

Temas: 16
Subtemas: 12
Gráficos: 30
Fórmulas: 23
Tablas: 0

Tema:

La Conjetura de
Poncaré

A
B ✓
C

La Conjetura de Poincaré

Henry Poincaré Jules nació el 29 de abril de 1854 en el barrio de Cite' Douale, en Nancy, en el seno de una influyente familia. Su padre, León Poincaré (1828-1892), era profesor de medicina en la Universidad de Nancy. Su adorada hermana menor contrajo nupcias con el filósofo espiritualista Emilie Boutroux. Su madre fue Eugénie Launois (1830-1897). Otro miembro destacado de su familia fue el primo de Henry, Raymond Poincaré quien ocupara la presidencia de Francia entre 1913 y 1920 y llegaría a ser miembro de la academia francesa.

Fue un matemático francés, Ingreso en el Polytechnique en 1873, continuó sus estudios en la Escuela de Minas bajo la tutela de Charles Hermite y

se doctoró en matemáticas en 1879.

Fue nombrado profesor de física matemática en la Sorbona en (1881) puesto que mantuvo hasta sus últimos días de vida.



Educación

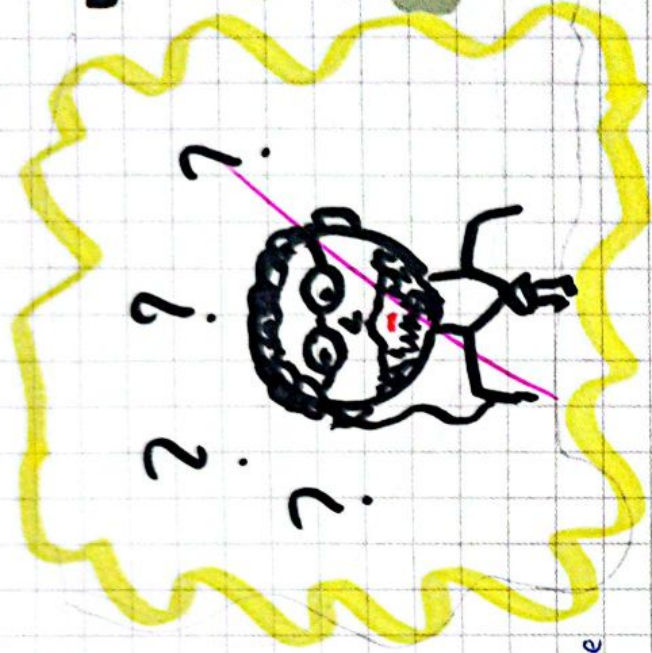
Durante su niñez, Henri estuvo seriamente afectado por la difteria, por lo que su educación formal estuvo a cargo de su madre, Eugénie Lamoignon, mujer de gran intelecto. Poincaré se destacó por la calidad de sus composiciones escritas.

En 1862 ingresó en el Liceo de Nancy. En el curso de los once años Poincaré demostró ser uno de los mejores alumnos en casi todas las materias que estudió, las materias en que peores resultados obtuvo fueron música y educación física. Algunos maestros afirmaron que sus dificultades en estas áreas pudieron deberse a defectos en su visión y tendencia a estar distraído. Poincaré se graduó en el Liceo en 1871, con el grado de bachiller en Ciencias y Letras.

Ingresó en la prestigiosa École Polytechnique en 1873. Allí estudió matemáticas bajo la tutela de Charles Hermite, continuando su formación y llegando a publicar su primer artículo científico en 1874.

Tiempo después Henri se encontraba preparando su doctorado en ciencias matemáticas bajo la supervisión de Charles Hermite. Su tesis doctoral trataba sobre el campo de las ecuaciones diferenciales. Poincaré desarrolló un nuevo método para estudiar las propiedades de dichas ecuaciones. No solo encaró el problema de la determinación de la integral de estas ecuaciones, sino que fue la primera persona en estudiar sus propiedades genéticas geométricas. Por otra parte se dio cuenta de que dichas propiedades geométricas podían ser utilizadas para

Primeros años de su carrera



Después de su graduación, Poincaré aceptó un ofrecimiento para trabajar como profesor en la Universidad de Caen. A pesar de su entrega a las matemáticas, nunca abandonó totalmente su carrera en la minería. Pueba de ello es su trabajo en el Ministerio de Servicios Públicos, en el que estuvo empleado como ingeniero a cargo del desarrollo de ferrocarril del norte entre 1881 y 1885. Con el tiempo, Poincaré sería nombrado responsable del Corps de Mines en 1893, e inspector general en 1910.

A partir de 1881 y por el resto de su carrera, ejerció como profesor en la Universidad de París. Involuntamente fue nombrado maître de conférences d'analyse. Con el tiempo, llegaría a ocupar las cátedras de Mecánica Física y Experimental, Física Matemáticas, Teoría de la Probabilidad, Mecánica Celeste y Astronomía. Fue también en 1881 que Poincaré contrajo matrimonio con Louise Poulain d'Andea, hija de Isidore Geoffroy y Saint-Hilaire. Fruto de esta unión tuvieron cuatro hijos: Jeanne nacida en 1887 y Yvonne nacida en 1889, Henriette nació en 1891 y León nació en 1895.

Su contexto: Analisis situs

Poincaré es el creador de la topología, que él llamo Analisis situs, como de las matemáticas que se ocupa de caracterizar las propiedades de los objetos que permanecen tras una deformación continua sin roturas ni pegadas. Es algo como una geometría blanda. Esta manera de pensar solo es posible en una mente con una extraordinaria capacidad de abstracción espacial. Según Poincaré, es la ciencia que nos hace conocer las propiedades cualitativas de las figuras geométricas.

Caracterización topológica

La circunferencia S^1 : Desde el punto de vista topológico cualquier curva simple cerrada en el plano o en cualquier espacio de dimensión superior es una esfera S^1 . Por lo tanto el número de componentes caracteriza la circunferencia o esfera de dimensión 1 entre todas las variedades de dimensión 1, compactas.

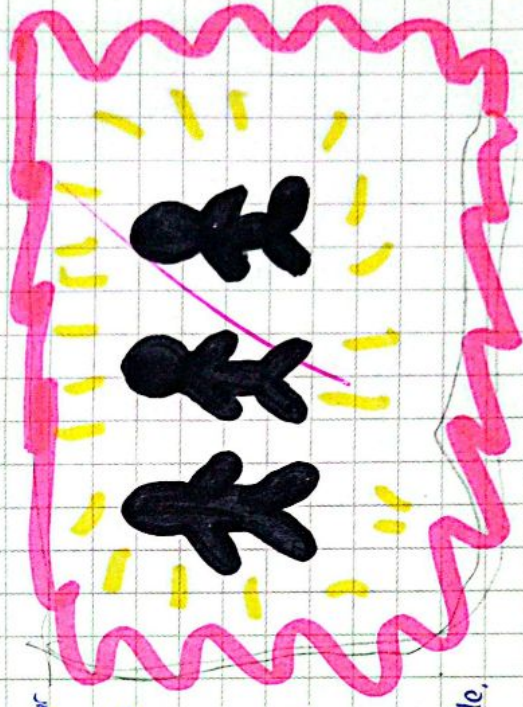
La superficie esférica S^2 : Es la dimensión 2 el problema se complica por que existen muchas variedades de dimensión 2 conexas y compactas que no son homeomorfas a la esfera S^2 , luego el invariante numérico dado por el número de componentes conexas que era suficiente en dimensión 1, no basta en dimensión 2.

La caracterización de la esfera de dimensión 2 con una propiedad intrínseca que la distingue de las otras variedades de dimensión 2, se consigue con una variante algebraica de lo que estudiado por Poincaré.

El problema de los tres cuerpos

En 1884, y como parte de los festejos conmemorativos por su sexagésimo cumpleaños a celebrar en 1889, el rey Oscar II de Suecia y Noruega, instauró una competencia matemática, probablemente por iniciativa del matemático sueco Mittag-Leffler. La convocatoria del curso se publicó a mediados de 1885 en las revistas Acta Mathematica y en Måtture. Las bases establecían cuatro problemas, aunque dejaban abierta la posibilidad de resolver cualquier otro.

El primero, puesto por Karl Weierstrass, es conocido como problema de n cuerpos y está relacionado con determinar la estabilidad del sistema solar. En junio de 1887 Poincaré contestó a una carta previa diciendo que se presenta al concurso con dicha cuestión.



Como lo considera prácticamente irresoluble,

trabaja ampliando sus estudios sobre una restricción, el problema de los tres cuerpos.

Su memoria, presentada en mayo de 1888, fue tan notable que el jurado decidió declararle ganador, confirmando al monarca en enero de 1889, un día antes del aniversario del real nacimiento.

La conclusión principal de Poincaré estableció que la evolución de un sistema como el ejemplificado era extremadamente caótica, en el sentido de que una pequeña perturbación en el estado inicial podía llevar en algún momento a un estado radicalmente diferente. Por lo tanto, si con los instrumentos de medición disponibles no se

puede detectar esta mínima variación, sería imposible predecir el estado

final del sistema. Uno de los integrantes del jurado, el distinguido Karl Weierstrass

afirmó "si bien este trabajo no puede ser considerado como la solución completa

del desafío presentado, es de tal importancia que su publicación marcará el comienzo

de una nueva era en la historia de la Mecánica Celeste".

Durante la revisión previa a su publicación en la revista Acta el editor detectó

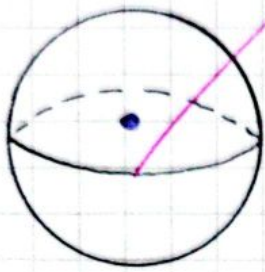
algunas imprecisiones. Comunicadas a Poincaré para que las aclarase, este contestó

el 1 de diciembre que se trataba de un error grave. Su arreglo condujo a nuevos

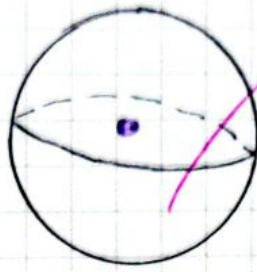
descubrimientos por parte de Poincaré, las órbitas doblemente asintóticas y que

hoy se consideran los comienzos de la teoría del Caos.

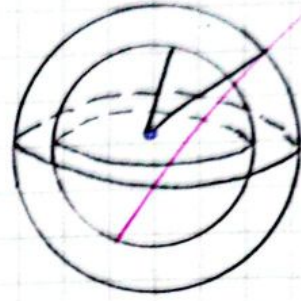
La conjetura de Poincaré



+



=



Es un problema topológico establecido en 1904 por el matemático Henri Poincaré. Caracteriza esferas tridimensionales de una forma muy sencilla. Utiliza solo el primer invariante de la topología algebraica, el grupo fundamental, que también fue definido y estudiado por Poincaré.

La conjetura implica que si en espacio no tiene agujeros esenciales, entonces es una esfera.

Este problema fue resuelto directamente entre 2002 y 2003 Grigori Perelman, y como consecuencia de su demostración de la conjetura de la geometrización de Thurston, que culminó en el camino propuesto por Richard Hamilton.

Por ejemplo: la superficie de un balón de fútbol, es casi un ejemplo de variedad de dimensión 2, una 2-esfera; lo podemos manipular como queramos, dándole diferentes formas, pero sin romperlo, y seguirá siendo una 2-esfera.

La esfera de Poincaré constituye un modelo adecuado para la representación de estados de polarización de la luz, así como de la acción de los medios materiales sobre la luz polarizada.

Topología

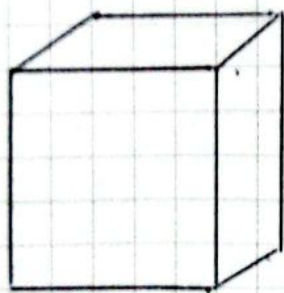
Los objetos de la categoría topológica son los espacios topológicos y sus aplicaciones son las aplicaciones continuas las equivalencias.

Homeomorfismos son aplicaciones biyectivas continuas con inversa continua.

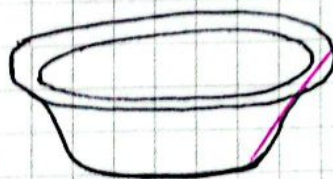
Podemos decir dos objetos que son **espacios topológicos** que son iguales (homeomorfos), si uno se obtiene del otro por una deformación topológica "continua sin singularidades" llamada ISOTOPÍA

► Objetos topológicamente iguales

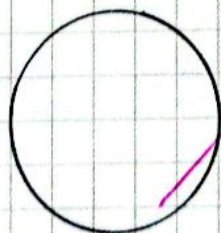
Poliedro sólido



Plato



Bola Tridimensional.



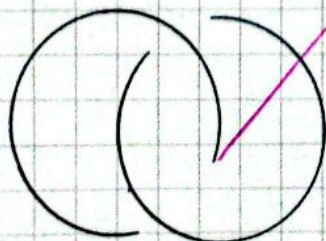
En estas deformaciones

topológicas hay propiedades

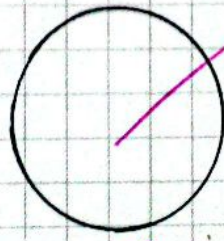
que permanecen, son aquellas

de naturaleza topológica y su estudio desemboca en la definición de los llamados Invariantes

► Objetos topológicamente distintos



dos circunferencias enlazadas



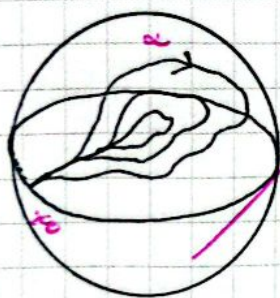
circunferencia

Origen de la cuestión

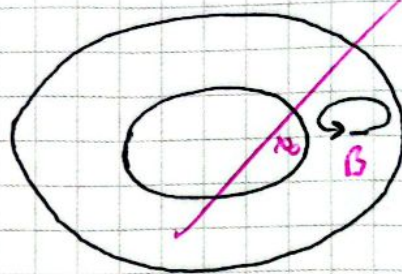
La conjetura de Poincaré es una caracterización de S^3 . En 1900 Henri Poincaré, por analogía con la caracterización S^1 , escribió que S^3 es la única variedad de dimensión 3 en la que toda la curva cerrada bordea una superficie.

Describe una variedad de dimensión 3, conocida como "esfera homológica de Poincaré", que tiene un grupo fundamental de 120 elementos y su recubridor universal es la esfera S^3 . Se puede definir como el conjunto de dodecaedros o isocaedros inscritos en una esfera bidimensional.

Camino en superficies



Un camino en una esfera de dimensión 2.



Un camino β en una superficie toro.

R1: la esfera es la única superficie cerrada cuyo grupo fundamental es el grupo trivial;

$$\pi_1(S^2, x_0) = \{0\}$$

Cada camino cerrado se contrae a un punto, luego todos los lazos basados en x_0 , son de clase del elemento neutro, pues el camino es constante.

R2: La esfera S^1 , es la única superficie en la que cada camino cerrado es el borde de una superficie.

Visualización de esfera tridimensional

Para la representación de la esfera tridimensional como un espacio topológico que podemos comprender e imaginar fácilmente, se recordarán ciertos elementos que se definen en S^3 :

Polo Norte $N: (0, 0, 0, 1)$

Polo Sur $S: (0, 0, 0, -1)$

Hemisferio Norte $H_N: \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 \geq 0\}$

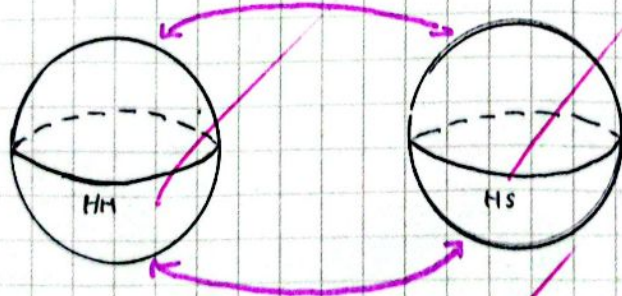
Hemisferio Sur $H_S: \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 \leq 0\}$

Ecuador $E: H_N \cap H_S: \{(x_1, x_2, x_3, 0) \} \cong S^2$

Unión de esferas tridimensionales

Es claro que cada hemisferio es una bola tridimensional, puesto que:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - x_4^2 \leq 1$$

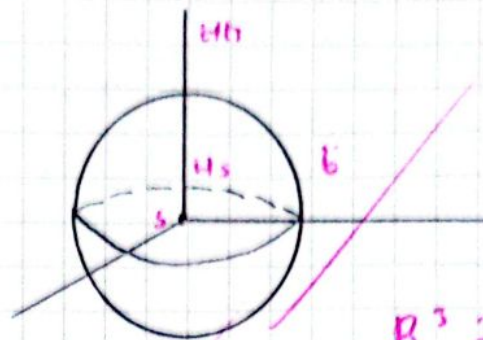


proyección estereográfica

Esta proyección estereográfica desde el norte de la esfera al hiperplano ecuatorial.

$$e: S^3 \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow \left(\frac{X_1}{1-X_4}, \frac{X_2}{1-X_4}, \frac{X_3}{1-X_4} \right)$$



$$R^3 \cong S^3 \setminus \{N\}$$

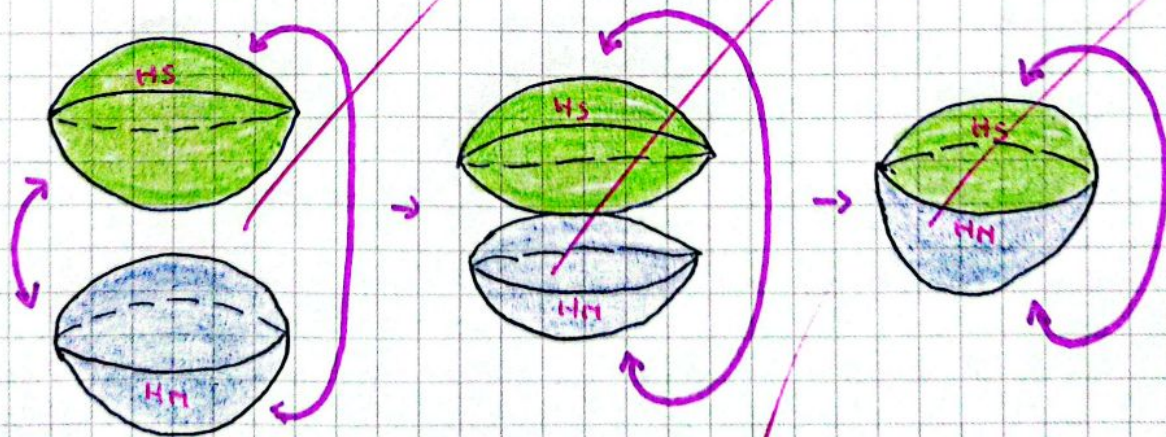
Unión de dos Toros sólidos

Si se considera un toro sólido $(D^2 \times S^1)$ no anudado en R^3 , su complementario en $R^3 \cup \infty \cong S^3$, es también un toro sólido.

El pegado se realiza por la superficie tórica del borde identificando el meridiano de un toro con una longitud del otro toro.

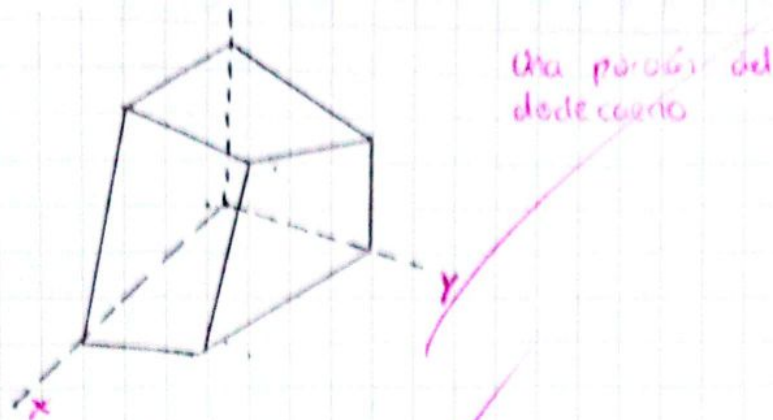
Esfera con borde identificado por reflexión

Si partimos de la representación de S^3 como dos bolas pegadas por su esfera borde y hacemos primero la identificación de un disco, el resultado es homeomorfo a una bola en la que debe identificar la esfera borde por más reflexión en una línea.

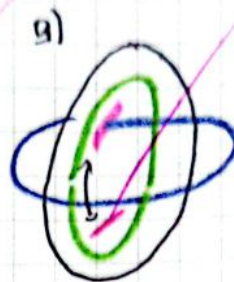
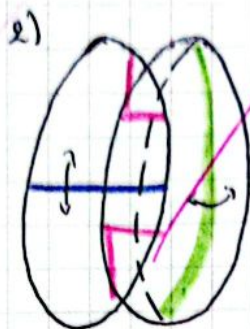
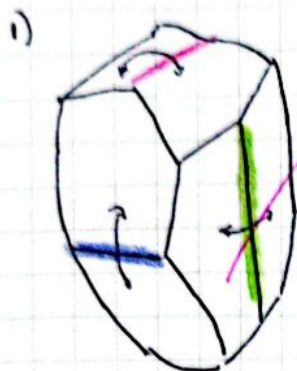


Un dodecaedro - caras identificadas

Un dodecaedro total es el resultado de reflejo en los 3 planos condensados la porción.



Identificación del dodecaedro



Esfera tridimensional

En 1900, Henri Poincaré, por analogía con la caracterización P_2 de la esfera S^2 , escribió que también la esfera S^3 es la única variedad de dimensión 3 en la que toda curva cerrada bordea una superficie. En 1904, publicó un contraejemplo de esta supuesta caracterización. Se describe una variedad de dimensión 3, hoy conocido como esfera homológica de Poincaré, en la que toda curva cerrada bordea una superficie, pero no es homeomorfa a la esfera tridimensional.

Su enunciado

Un enunciado preciso de la conjetura de Poincaré es:

Es una variedad de dimensión 3, cerrada (compacta y sin borde) con grupo fundamental trivial es homeomorfa a la esfera tridimensional.

Suena y puede parecer una sencilla afirmación, y es difícil imaginar un contraejemplo. Por eso han sido numerosas las que a lo largo del siglo XX se han atrevido a presentar una demostración detallada, demostración que siempre ha resultado incompleta o errónea.

Esferas S^n , $n > 3$

Se observa fácilmente que existen variedades de dimensión n ($n > 3$) cerradas con grupo fundamental trivial que no son homeomorfas a la esfera.

El producto cartesiano de esferas $S^k \times S^{n-k}$ donde $k > 1$

La topología algebraica: proporciona invariantes algebraicos que generalizan al grupo fundamental.

Se trata de los grupos de la homología π_i cuyos elementos son clases de equivalencias de aplicaciones basadas de esferas basadas (S^i, z_0) en la variedad basada (M, m_0) ($i=1$ es el grupo fundamental)

Dos espacios X, Y , se dice que son del mismo tipo de homología si tienen todos sus respectivos grupos de homología isomorfos

$$\pi_i(X, x_0) \cong \pi_i(Y, y_0) \text{ para toda } i \in \mathbb{N}$$

Enunciado - conjetura en dimensión

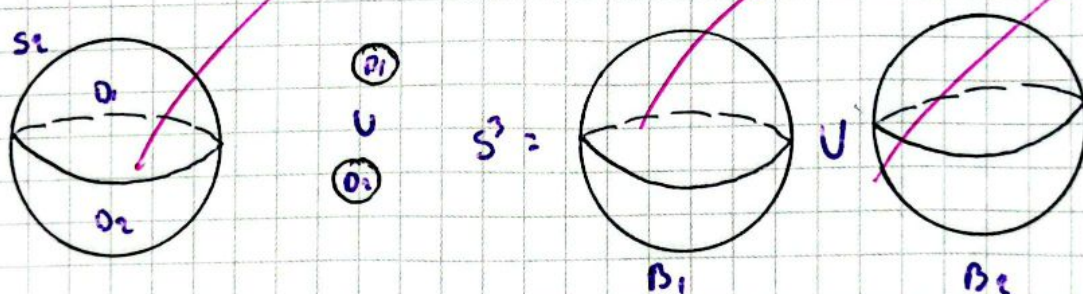
Una variedad de dimensión n , $n > 3$, cerrada del mismo tipo de homología que la esfera S^n es homeomorfa a la esfera S^n .

Construcciones 3-V

Una 3-variedad M es un espacio topológico que localmente se ve como el espacio tridimensional. Formalmente; una 3-variedad M es un espacio métrico separable tal que cada uno de sus puntos tiene una vecindad abierta homeomorfa.

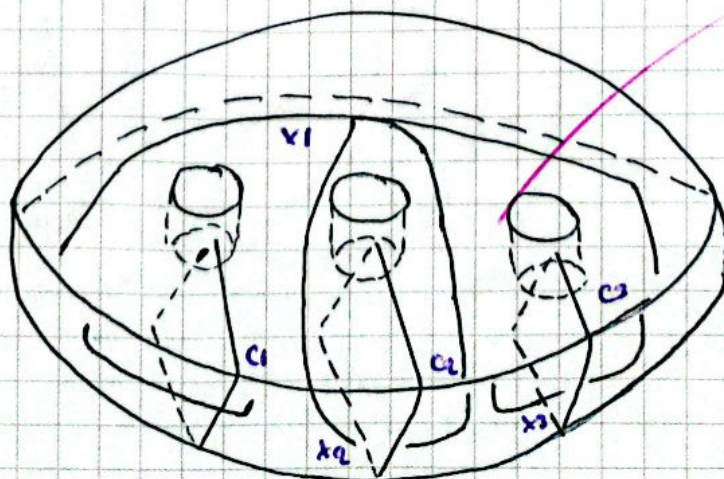
$$\mathbb{R}^3 \text{ o } \mathbb{R}^3_+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 \geq 0\}$$

Para una 3-variedad M , ∂M es vacía o es una 2-variedad sin frontera, es decir, una superficie. Se puede generalizar a dimensión 3 y decimos que una 3-variedad es no-orientable, si contiene una copia de $F \times I$ donde F es una banda de Möbius; entonces una 3-variedad es orientable si no contiene una copia de $F \times I$.



$$S \times I = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in S, 0 \leq x_3 \leq 1\}$$

Este es una 3-variedad cuya frontera es una especie conexa de genero n .



Cirugía de Dehn

Cuando K un nodo en S^3 una curva simple cerrada en S^3 y sea $N(K)$ una conjugación tubular de K .

$$N(K) \cong S^1 \times D^2$$

conjunto sólido

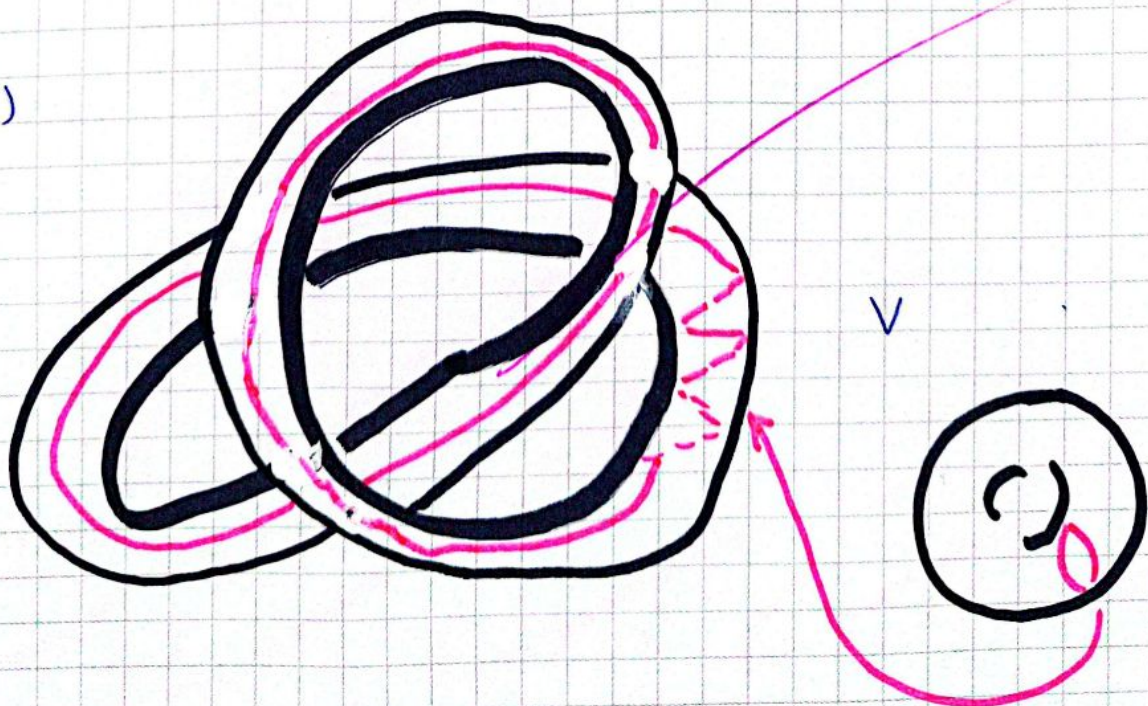
su espacio $E(K) = S^3 - \text{int } N(K)$

El exterior de K es una tercera frontera

$$T = \partial E(K) = \partial N(K)$$

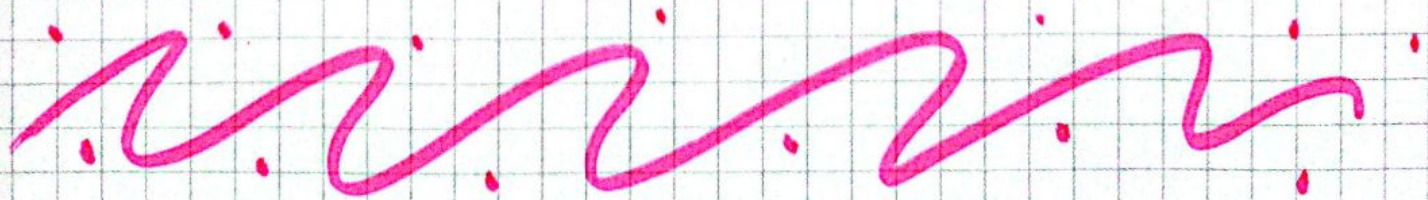
Si μ y λ una longitud y un meridiano preferente de $\partial E(K)$, $\partial N(K)$, μ es una curva esencial de T .

$E(K)$



Consecuencias de Poncairé

La definición del grupo fundamental se debe aplicar a cualquier lugar o espacio topológico, para que este bien definido su lugar debe ser arcoconexo no se necesita que sea de manera amplia pero de llegar el caso que tengamos una 3-variedad dado por una triangulación se toma como punto base los vértices de la triangulación y cualquier lazo que sea homotópico a un contenido en el 1-esqueleto de la 3-variedad lo sea el conjunto de vértices y aristas.



Whitehead y sus variedades

Durante los años de 1933 Whitehead dio a conocer ante el mundo una prueba sobre la conjetura de Poincaré y en 1934 se dio cuenta que en su demostración tenía un error. Ya que una implicación 3 - variedad abierta no era compacta ni tenía su frontera por ello simplemente conexo tuvo que ser homeomorfa a R^3 por lo cual él dio un ejemplo de una 3 - variedad abierta y simplemente se tuvo que conocer de hecho o manera contraria y que no sea o termine siendo homeomorfa a R^3 .

Alfred North Whitehead también reconocido como la figura que define a la escuela filosófica conocida como la filosofía del proceso que hoy en día ha encontrado aplicación en una gran variedad de disciplinas, tales como la ecología, la teología, la educación, la física, la biología, la economía y la psicología.

Lema de Dehn y teorema de Poincaré

El lema de Dehn fue enunciado y probado por Dehn en 1910, en 1911, Kneser encontró un error en su demostración. Una demostración correcta fue dada por Papakyriakopoulos en 1957. El lema dice:

Sean K un nudo en una 3-variedad M y supongase que existe una

curva $f: D^2 \rightarrow M$ tal que f restringido a ∂D es un homeomor-

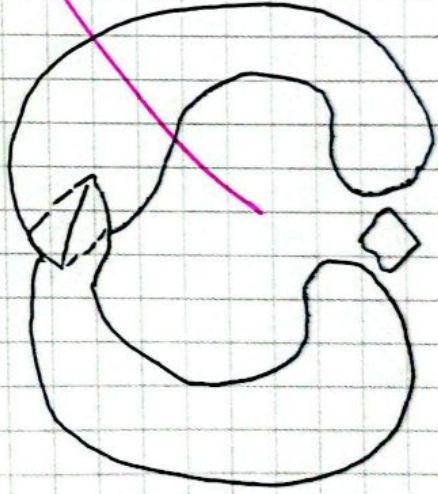
fismo de ∂D sobre K y que $f(\text{Int } D) \cap K = \emptyset$. Entonces

existe un disco p encajado en M , tal que $\partial p = K$.

El teorema de Poincaré: Si L no es monomorfismo, entonces existe una

curva simple cerrada α en S^1 , que es esencial en S y un disco D encajado

en M tal que $\partial D = \alpha$.



Cualquier nudo en S^3 es frontera de un disco con singularidades pero solo el nudo trivial es frontera de un disco encajado.

Grupo de Poincaré

Espacio topológico X

Cada espacio topológico X con un punto distinguido x_0 , tiene asociado un grupo abeliano, $\pi_1(X, x_0)$ cuyos elementos son equivalencias de caminos que empiezan y terminan en el punto x_0 , a los que llamamos lazos, dos lazos son equivalentes si se puede deformar uno en el otro de forma continua manteniendo fijos los extremos.

Composición de los elementos

La comparación de dos elementos $[\alpha]$, $[\beta]$ del grupo es la clase que resulta de recorrer primero un camino α representante del primer elemento $[\alpha]$ y a continuación el camino β , representante del otro elemento $[\beta]$

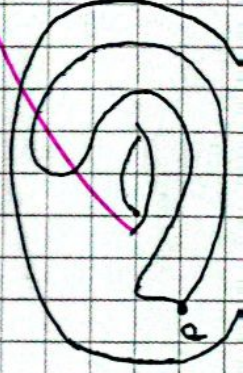
Elemento neutro

El elemento neutro de esta composición es la clase del camino constante, que envía a todas las puntos del intervalo unidad al punto base x_0 .

$$C_{x_0}: [0, 1] \rightarrow X, \quad C_{x_0}(t) = x_0$$

En topología, podemos asociar a cada punto p de un espacio topológico X un grupo que nos informa sobre la estructura 1 -dimensional de la porción de espacio que rodea a este punto.

Los elementos de este grupo, llamado grupo fundamental de X relativo al punto base p , son clases de equivalencia de lazos (curvas cerradas) con origen en el punto p .



Aporte

Pienso que el conocer más sobre Poincaré nos permite evaluar y comprender de mejor manera diversos procesos económicos.

Conclusión

Poincaré fue un personaje importante dentro de las matemáticas ya que con su conjetura cambió la perspectiva de diversas cosas.

Recomendación

Leer e indagar más sobre el tema para así comprender de mejor manera la conjetura de Poincaré.